Analiză combinatorică

1. Permutări

Definiția 1. O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o <u>*mulțime ordonată*</u> şi se notază *$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$*.

Definiția 2. Se numesc <u>*permutări*</u> ale unei mulțimi A cu n elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente. Numărul permutărilora n elemente, $n\in\mathbf{N}^*$, este $P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = n!$; $0! = 1$ (prin definiție).

Factorial (proprietăți): $n! = (n-1)!n$; $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$

2. Aranjamente

Definiția 1. Se numesc <u>*aranjamente* a *n* elemente luate câte *m*</u> ($m\le n$) ale unei mulțimi A cu n elemente, toate submulțimile ordonate cu câte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A. Se notează A_n^m.

Numărul aranjamentelor a n elemente luate câte m este:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},\ n\ge m.$$

Proprietăți: $A_n^n = P_n$; $A_n^n = \dfrac{n!}{0!}$ sau $A_n^n = n!$; $A_n^{n-1} = A_n^n$; $A_n^0 = 1$.

3. Combinări

Definiția.1. Se numesc <u>combinări a *n* elemente luate câte *m*</u> ($m\le n$) ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A. Se notează C_n^m.

Proprietăți:

1. $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$; 2. $C_n^n = C_n^{n-m}$; **3**. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
4. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n;
5. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$;
6. $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-(p_1+\ldots+p_{m-1})}$ unde $p_1 + \ldots p_{m-1} < n$

4. Binomul lui Newton

$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n$

$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + (-1)^n C_n^n a^n$ unde $n\in\mathbf{N}$.

Proprietăți:

1. Termenul de rank $k+1$ este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k$;
2. $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$; $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$;
3. $T_{k+2} = \dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{a}{x}\ T_{k+1}$ sau $T_{k+2} = -\dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{a}{x}\ T_{k+1}$;
4. Numărul termenilor dezvoltării $(x \pm a)^n$ este $n+1$;
5. Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.

Relații importante:

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n; C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0;$

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1};$

$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$

Dezvoltãri particulare uzuale:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac);$
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$
5. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc;$
6. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

5. Suma puterilor asemenea ale primelor *n* numere naturale

Dacã $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, $p \in \mathbf{N}$, atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2};\ S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ S_3 = \left[\frac{n(n+1}{2}\right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30};\ S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relație care permite calculul lui S_p, când se cunosc $S_{p-1}, S_{p-2}, \ldots, S_1$ este formula lui Pascal:

$(n+a)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{P+1}^2 S_{p-1} + ... + C_{p+1}^p S_1 + n$

6. Probabilitate

Definiție. Pobabilitatea unui eveniment este egalã cu raportul dintre numãrul cazurilor egal posibile care realizeaza evenimentul şi numãrul cazurilor egal posibile.
Aşadar, vom spune cã probabilitatea evenimentului A este egalã cu raportul dintre numãrul *m* al cazurilor favorabile realizarii evenimentului A şi numãrul *n* al cazurilor egal posibile. Vom scrie

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze $C_3^2+3!$.
2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta sa fie divizibil cu 3.
3. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\left\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},...,\sqrt[3]{30}\right\}$, acesta să fie număr rațional.
4. După o reducere cu 20 %, prețul unui produs este 320 de lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
5. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},...,\ \sqrt{10}\right\}$, acesta să fie rațional.
6. Să se calculeze $A_4^4+C_4^4$.
7. O sumă de 1000 de lei a fost depusă la o bancă şi după un an s-a obținut o dobândă de 80 de lei. Să se calculeze rata dobânzii.
8. Să se compare numerele $a=C_4^1+C_4^3$ şi $b=C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3$.
9. Să se calculeze $C_5^4+A_5^4$.
10. Să se rezolve ecuația $C_n^2=28$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.
11. Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea $\{1, 2,3, 4,5\}$.
12. Să se efectueze $A_6^2-2C_6^4$.
13. Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
14. Să se calculeze $C_8^3-C_8^5$.
15. Să se determine numărul natural n, $n\geq 1$ ştiind că $A_n^1+C_n^1=10$.
16. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n!<50$.
17. Să se determine numărul natural n, $n\geq 5$, ştiind că $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}=6$.

18. Să se determine câte numere naturale de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

19. Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

20. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

21. Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^{n+1} = 2$, unde $n \in \mathbf{N}$.

22. Să se calculeze $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$.

23. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 şi C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

24. Să se calculeze $C_5^2 - A_4^2 + 6$.

25. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2 \le 2^n$.

Rezolvare

1. După formula combinărilor $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se obține: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(2-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$ și $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Atunci $C_3^2 + 3! = 3 + 6 = 9$.

2. $p = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$. Numerele obținute sunt 111, 112, 121, 122, 211, 221, 222, 212; numărul cazurilor posibile este 8. Numerele divizibile cu 3 sunt 111, 222; cazuri favorabile sunt 2. $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

3. Pentru a fi număr rațional trebuie sa fie cub perfect $\Rightarrow \sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3$, sunt 3 cazuri favorabile și 30 de cazuri posibile $\Rightarrow p = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

4. Regula de trei simple: 80% ....320 lei
100%.........................x lei

$$x = \frac{100\cdot \cancel{320}^{4}}{\cancel{80}_{1}} = 400,\ R\text{: 400lei.}$$

5. Din mulțimea A numere raționale sunt $\sqrt{4} = 2$ și $\sqrt{9} = 3$ și probabilitatea este $p = \frac{2}{9}$.

6. $A_4^4 + C_4^4 = \frac{4!}{(4-0)!} + \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{4!\cdot 0!} = 1 + 1 = 2$.

7. 1000 lei 100%
80 lei .... x %

$x = \frac{80\cdot 100}{1000} = 8$. Răspuns 8% dobânda anuală.

8. $a = C_4^1 + C_4^3 = \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} + \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{\cancel{4!}^{4}}{1!\cdot \cancel{3!}_{1}} + \frac{\cancel{4!}^{4}}{\cancel{3!}_{1}\cdot 1!} = 4+4=8$ și

$b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$, atunci $a = b$.

9. $C_5^4 + A_5^4 = \frac{\cancel{5!}^{5}}{{}_{1}\cancel{4!}\cdot(5-4)!} + \frac{5!}{(5-4)!} = 5 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5 + 120 = 125$.

10. $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!}(n-1)\cdot n}{2\cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 28 \Rightarrow (n-1)\cdot n = 56$

produsul a două numere naturale consecutive este 56 $\Rightarrow$ 7·8 = 56 $\Rightarrow$ $n = 8$.

11. Numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente dintr-o mulțime cu 5 elemente este $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{\cancel{5!}^{4\cdot 5}}{2!\cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$.

12. $A_6^2 - 2C_6^4 = \frac{6!}{(6-2)!} - 2\cdot\frac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = \frac{6!}{4!} - \cancel{2}\cdot\frac{6!}{4!\cdot\cancel{2}!} = \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{4!} = 0$

13. Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii cu 4 elemente este

$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}}{1\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\cancel{2}} = 6$.

14. Din $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_8^3 = C_8^5 \Rightarrow C_8^3 - C_8^5 = 0$.

15. $A_n^1 + C_n^1 = 10 \Rightarrow \frac{\cancel{n!}^{\,n}}{\cancel{(n-1)!}} + \frac{\cancel{n!}^{\,n}}{1!\cdot\cancel{(n-1)!}} = 10 \Rightarrow n + n = 10 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$.

16. Calculăm pentru fiecare: 0!=1<50; 1!=1<50; 2!=2<50; 3!=6<50; 4!=24<50 şi 5!=120>50.

Probabilitatea $p = \frac{5}{6}$.

17. $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = \frac{\cancel{(n-5)!}(n-4)(n-3)}{\cancel{(n-5)!}} = (n-4)(n-3)$ şi se obține $(n-4)(n-3) = 6$. Produsul a două numere naturele consecutive este 6 $\Rightarrow$ $2\cdot 3 = 6 \Rightarrow n - 4 = 2 \Rightarrow n = 6$.

18. Se pot forma $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1!} = 24$ numere naturale de câte trei cifre distincte.

19. Numere de două cifre distincte dintr-o mulțime cu patru elemente este

$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12$ şi se mai pot forma 4 numere cu cifrele identice, atunci sunt 16 numere de două cifre.

20. Pătretele perfecte de două cifre sunt: 16, 25, 36, 49, 64, 81 şi sunt 90 de numere de două cifre. Atunci $p = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

21. $C_{n+2}^{n+1} = 2 \Rightarrow \frac{\cancel{(n+2)!}^{\,n+2}}{{}_1\cancel{(n+1)!}\,\underbrace{(n+2-n-1)!}_{=1}} = 2 \Rightarrow n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0$.

22. $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$.

23. $C_4^2 = 6\,\vdots\,3$, $C_5^2 = 10$ şi $C_4^3 = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

24. $C_5^2 - A_4^2 + 6 = \frac{5!}{2!(5-2)!} - \frac{4!}{(4-2)!} + 6 = \frac{\cancel{5!}^{\,4\cdot 5}}{2!\cdot\cancel{3!}_1} - \frac{\cancel{4!}^{\,3\cdot 4}}{\cancel{2!}_1} + 6 = 10 - 12 + 6 = 4$.

25. Verificăm pentru fiecare element al mulțimii:
$n = 1 \Rightarrow 1^2 \le 2^1$ „A”; $n = 2 \Rightarrow 2^2 \le 2^2$ „A”; $n = 3 \Rightarrow 3^2 \le 2^3 \Rightarrow 9 \le 8$ „F” ;
$n = 4 \Rightarrow 4^2 \le 2^4 \Rightarrow 16 \le 16$ „A” ; $n = 5 \Rightarrow 5^2 \le 2^5 \Rightarrow 25 \le 32$ „A”. Probabilitatea
$p = \frac{\textit{numărul cazurilor favorabile}}{\textit{numărul cazurilor posibile}}$. Inegalitatea este verificată pentru 1,2,4,5 $\Rightarrow p = \frac{4}{5}$.